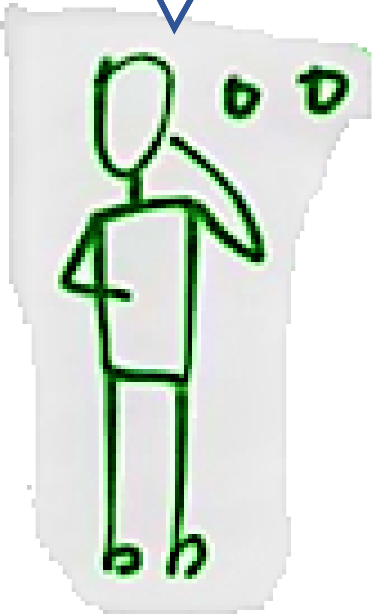
Ensaio de Hipóteses - Paramétricas

Questão

Qual o peso médio das maçãs do pomar?

Hipótese estatística

$\mu = 130grs?$



Ensaios de hipóteses paramétricas são **sempre** ensaios sobre os valores dos **<u>parâmetros da população</u>** : média, variância, proporção, …

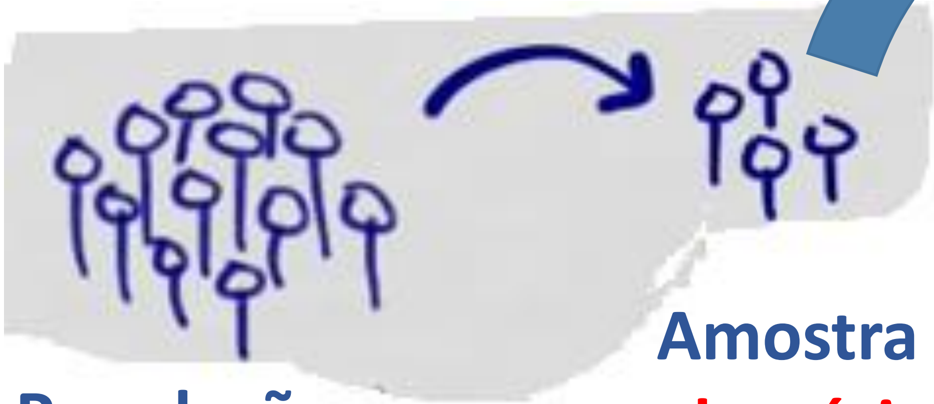
Ensaio de Hipóteses

9 passos de um Ensaio de Hipóteses:

1. Dados
2. Distribuição da população
3. Hipóteses
4. Escolha da estatística teste
5. Distribuição da estatística teste
6. Regra de decisão
7. Cálculo do valor da estatística teste\valor-p.
8. Teste mais potente – Lema de Neyman-Pearson
9. Decisão estatística

Ensaio de Hipóteses

1. Dados



População | **Amostra aleatória** | **Recolha de informação**

População	Amostra aleatória	Recolha de informação
Maçãs de um pomar	10 maçãs	Peso das maçãs
Saltos em comprimento de um atleta	20 saltos	Comprimento dos saltos
População de um concelho	50 residentes no concelho	Prática desporto

Ensaio de Hipóteses

2. Distribuição que melhor representa o comportamento da população é conhecida

População	Questão de interesse	Distribuição
Maçãs de um pomar	Peso médio das maçãs do pomar	Normal Variância conhecida
Saltos em comprimento de um atleta	Variância do Comprimento dos saltos	Normal Variância desconhecida
População de um concelho	Proporção que pratica desporto	Bernoulli

Ensaio de Hipóteses

3. Hipóteses

Hipótese alternativa

São sempre sobre os valores dos parâmetros da população

NÃO SOBRE OS VALORES DAS AMOSTRAS OU DAS ESTATÍSTICAS!

Hipótese nula

É a hipótese que se vai testar
Status Quo\Ausência de Efeito

Ensaio de Hipóteses

3. Hipóteses

Hipótese nula

Hipótese alternativa

É a hipótese que se vai testar
Status Quo\Ausência de Efeito

$$\boldsymbol{\Theta}_0 \cup \boldsymbol{\Theta}_1 = \boldsymbol{\Theta} = \{\mu \in (-\infty, +\infty)\}$$

Questão de interesse

Peso médio das maçãs do pomar

$\boldsymbol{H_0}: \mu = 130\ grs$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \mu = 150\ grs$ Hipótese simples contra simples

$\boldsymbol{H_0}: \mu = 130\ grs$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \mu > 130\ grs$

$\boldsymbol{H_0}: \mu = 130\ grs$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \mu < 130\ grs$

$\boldsymbol{H_0}: \mu = 130\ grs$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \mu \neq 130\ grs$

Hipóteses simples contra composta

$\boldsymbol{H_0}: \mu \leq 130\ grs$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \mu > 130\ grs$

$\boldsymbol{H_0}: \mu \geq 130\ grs$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \mu < 130\ grs$

Hipóteses composta contra composta

Ensaio de Hipóteses

3. Hipóteses

Hipótese nula

Hipótese alternativa

Questão de interesse

$$\boldsymbol{\Theta}_0 \cup \boldsymbol{\Theta}_1 = \boldsymbol{\Theta} = \{\sigma^2 \in (0, +\infty)\}$$

Variação do comprimento do salto de um atleta

$\boldsymbol{H_0}: \sigma^2 = 0.5\, mts$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \sigma^2 = 0.7\, mts$ $\quad$ Hipótese simples contra simples

$\boldsymbol{H_0}: \sigma^2 = 0.5\, mts$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \sigma^2 > 0.5\, mts$

$\boldsymbol{H_0}: \sigma^2 = 0.5\, mts$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \sigma^2 < 0.5\, mts$

$\boldsymbol{H_0}: \sigma^2 = 0.5\, mts$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \sigma^2 \neq 0.5\, mts$

Hipóteses simples contra composta

$\boldsymbol{H_0}: \sigma^2 \leq 0.5\, mts$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \sigma^2 > 0.5\, mts$

$\boldsymbol{H_0}: \sigma^2 \geq 0.5\, mts$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \sigma^2 < 0.5\, mts$

Hipóteses composta contra composta

Ensaio de Hipóteses

3. Hipóteses

Hipótese nula

Hipótese alternativa

Questão de interesse

$$\boldsymbol{\Theta}_0 \cup \boldsymbol{\Theta}_1 = \boldsymbol{\Theta} = \{\theta \in [0, 1]\}$$

Prática de desporto pelos residentes de um concelho

$\boldsymbol{H_0}: \theta = 0.35$ $\boldsymbol{H_1}: \theta = 0.4$

$\boldsymbol{H_0}: \theta = 0.35$ $\boldsymbol{H_1}: \theta > 0.35$

$\boldsymbol{H_0}: \theta = 0.35$ $\boldsymbol{H_1}: \theta < 0.35$

$\boldsymbol{H_0}: \theta = 0.35$ $\boldsymbol{H_1}: \theta \neq 0.35$

$\boldsymbol{H_0}: \theta \leq 0.35$ $\boldsymbol{H_1}: \theta > 0.35$

$\boldsymbol{H_0}: \theta \geq 0.35$ $\boldsymbol{H_1}: \theta < 0.35$

Ensaio de Hipóteses

3. Hipóteses

Hipótese nula

Hipótese alternativa

Em resumo:

$$\boldsymbol{\Theta}_0 \cup \boldsymbol{\Theta}_1 = \boldsymbol{\Theta} \quad (*)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_0 \cap \boldsymbol{\Theta}_1 = \emptyset$$

Muito importante: - a igualdade aparece sempre na H_0

- valores que o parâmetro pode assumir em H_1 são complementares dos valores de H_0 $(*)$

Ensaio de Hipóteses

4. Escolha da estatística teste

Questão de interesse	Informação	Estatística teste
Peso das maçãs do pomar	Peso de cada maçã da amostra	Peso médio na amostra - $\bar{X}$
Variação no comprimento dos saltos	Comprimento de cada salto na amostra	Variância do comprimento dos saltos na amostra - ${S'}^2$
Proporção que pratica desporto	Número de pessoas que pratica desporto na amostra	Proporção na amostra que pratica desporto- $\bar{X}$

Ensaio de Hipóteses

5. Distribuição da estatística teste

Estatística teste	Distribuição
Peso médio na amostra - $\bar{X}$	$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ou $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
Variância do comprimento dos saltos na amostra - S'^2	$\frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$
Proporção na amostra que pratica desporto- $\bar{X}$	$\frac{\bar{X}-\theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$

Ensaio de Hipóteses

6. Regra de decisão: Rejeitar $\boldsymbol{H_0}$ ou não rejeitar $\boldsymbol{H_0}$

Decisão é tomada tendo por referência a Região de Rejeição

Região de Rejeição\Crítica - W é um subconjunto do espaço amostra X, tal que:

- se $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W, rejeita - se\ \boldsymbol{H_0}$;

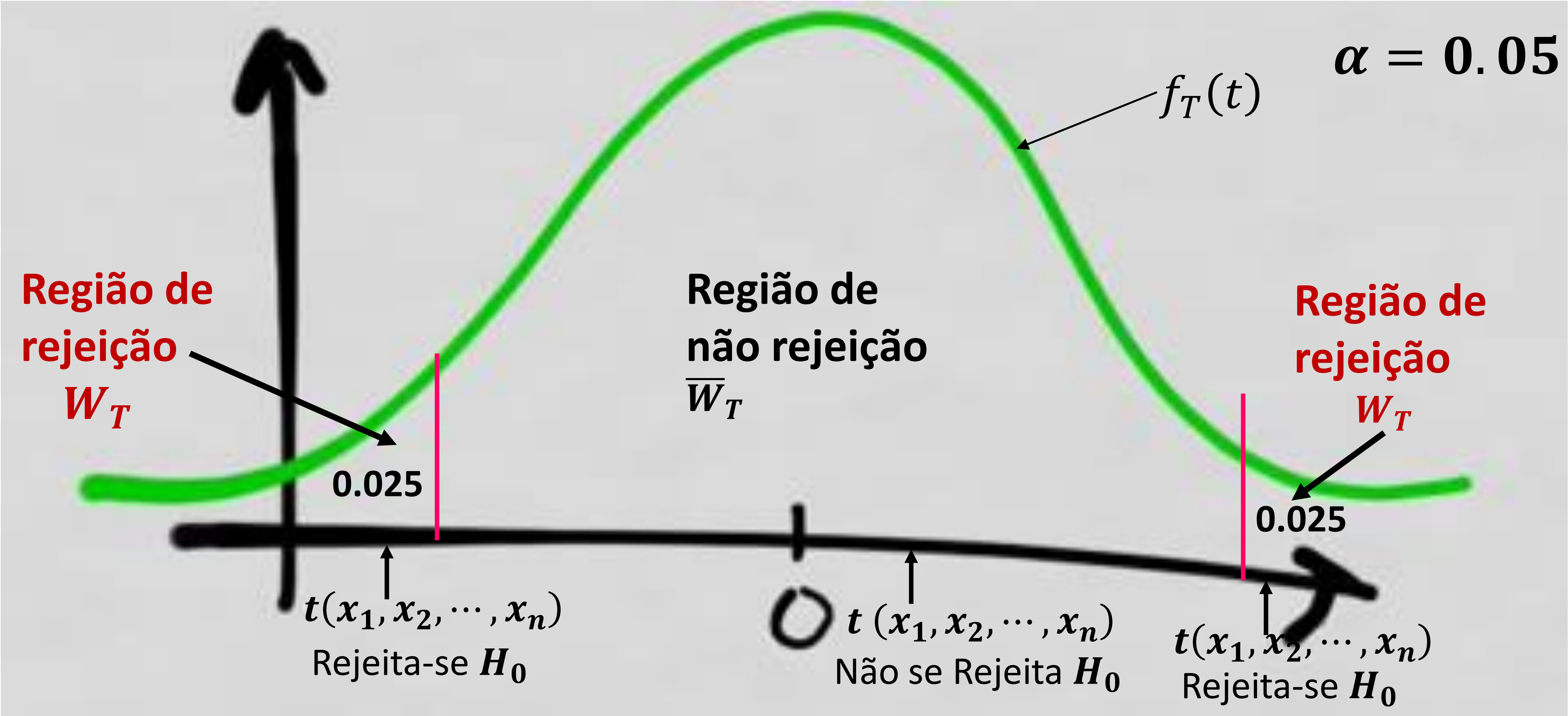
- se $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \bar{W}, não\ se\ rejeita\ \boldsymbol{H_0}$

Notas: $W \cup \bar{W} = \mathbb{R}^n$ $\quad$ $W \cap \bar{W} = \emptyset$

Atenção: como $W \subset \mathbb{R}^n$ pode ser complicado dizer se uma amostra particular pertence ou não a W. A utilização de uma estatística teste $\mathrm{T}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ e definição de uma região de rejeição W_T resolve esta dificuldade.

Ensaio de Hipóteses

Definido um **nível de significância** $\boldsymbol{\alpha}$, define-se a Região de Rejeição W_T com base na distribuição por amostragem da estatística teste T.



Ensaio de Hipóteses

Quando tomamos uma decisão podemos cometer dois tipos de erros:

Erro tipo 1: rejeitar H_0 e H_0 ser verdadeira

Erro tipo 2: não rejeitar H_0 e H_0 ser falsa

Situação / Decisão tomada	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Rejeitar H_0	Erro de 1ª espécie	Decisão correcta
Não rejeitar H_0 (Aceitar)	Decisão correcta	Erro de 2ª espécie

Ensaio de Hipóteses

Considere−se $\boldsymbol{H_0}: \theta = \theta_0$ contra $\boldsymbol{H_A}: \theta = \theta_1$

Dimensão do ensaio\P(erro 1ª espécie)

$$P(rejeitar\,\boldsymbol{H_0}|\boldsymbol{H_0}\ verdadeira) = P\big((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in W_T|\theta = \theta_0\big) = \boldsymbol{\alpha}$$

P(Erro 2ª espécie)

$$P(não\ rejeitar\,\boldsymbol{H_0}|\boldsymbol{H_0}\ falsa) = P\big((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in \overline{W_T}|\theta = \theta_1\big) = \boldsymbol{1 - \beta}$$

$$P(rejeitar\,\boldsymbol{H_0}|\boldsymbol{H_0}\ falsa) = P\big((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in W_T|\theta = \theta_1\big) = \boldsymbol{\beta}$$

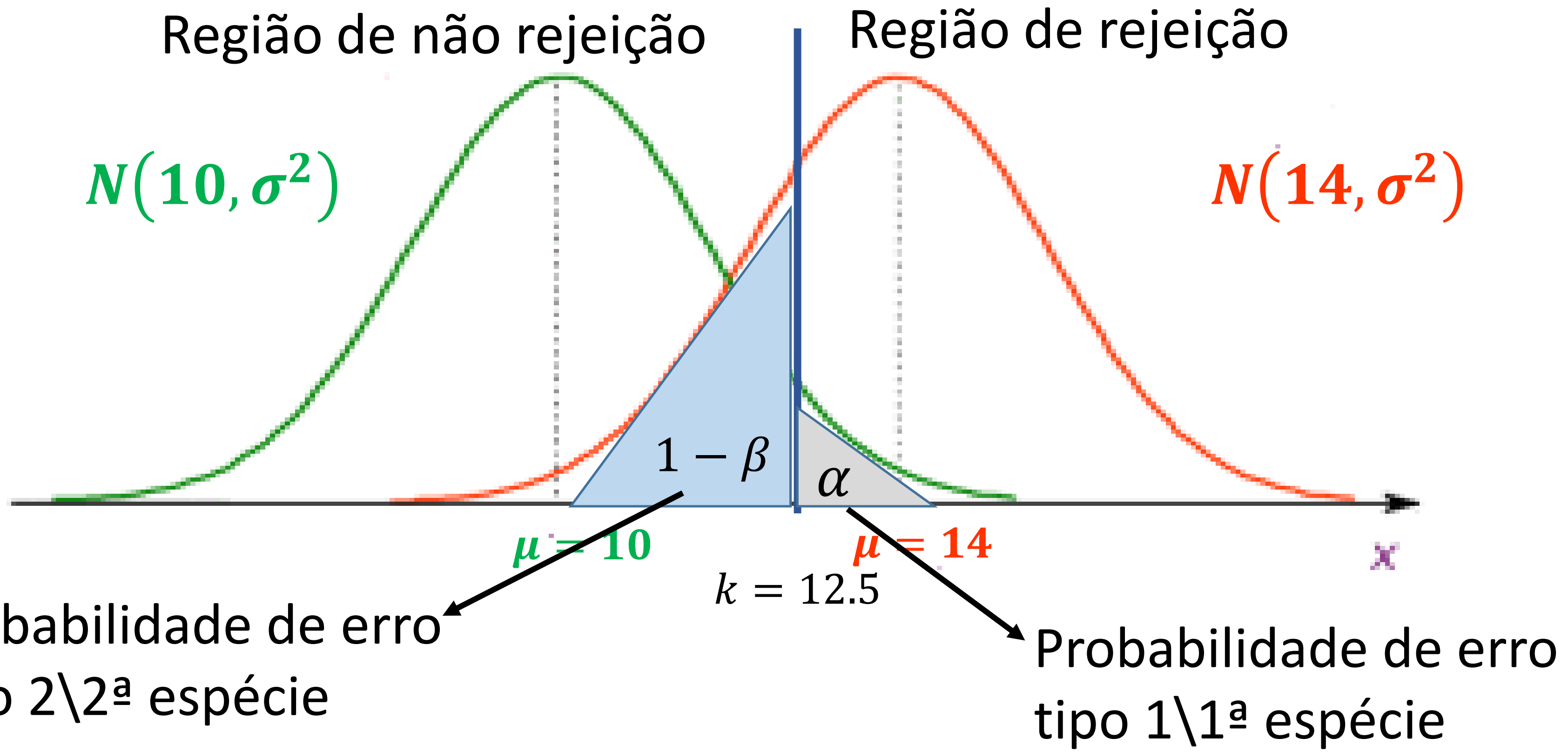
Potência do ensaio\teste

Ensaio de Hipóteses

Seja uma população $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$

Pretende-se testar $\boldsymbol{H_0}: \mu = 10$ contra $\boldsymbol{H_1}: \mu = 14$

$$W = \{\bar{x} : \bar{x} > k\}$$



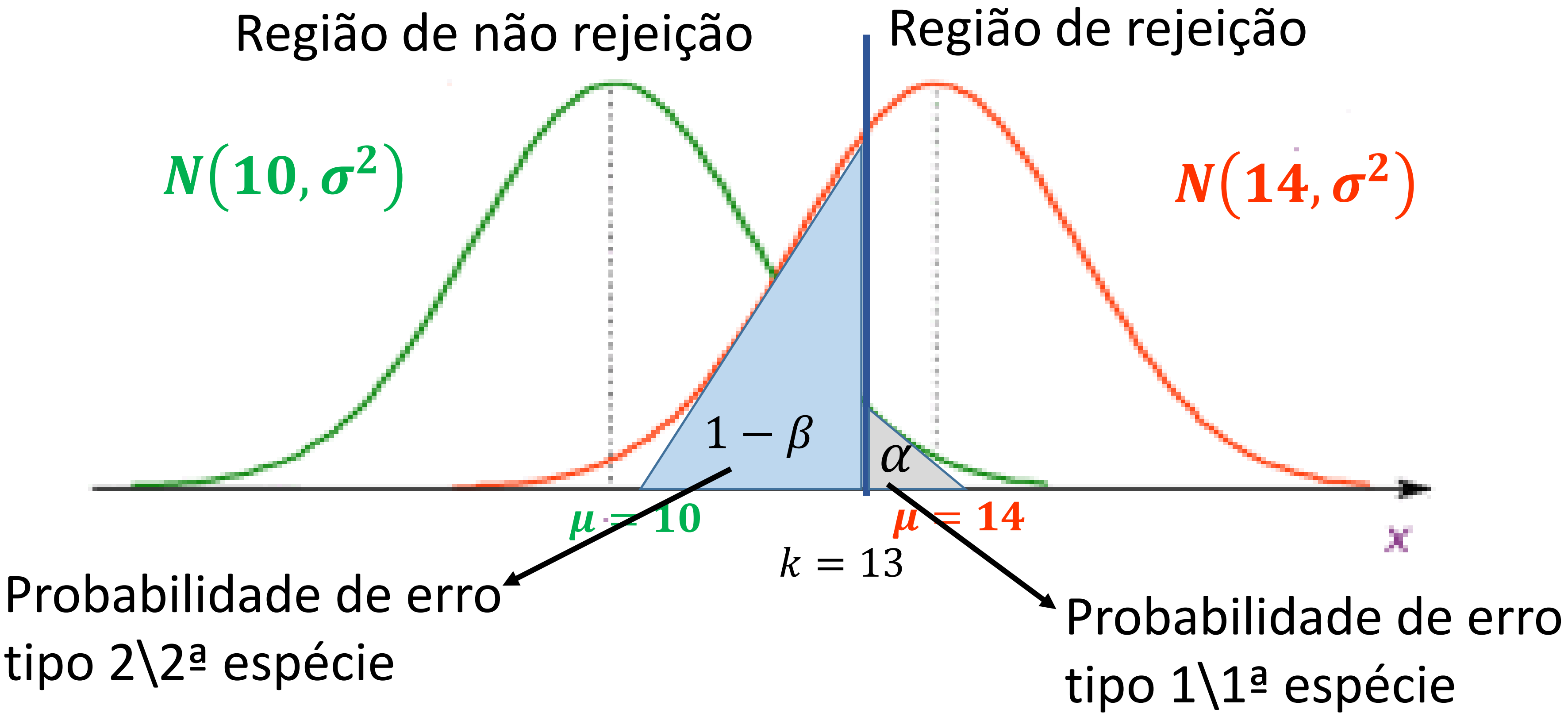
Ensaio de Hipóteses

Seja uma população $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$

Pretende−se testar $\boldsymbol{H_0}: \mu = 10$ contra $\boldsymbol{H_1}: \mu = 14$

$$W = \{\bar{x} : \bar{x} > k\}$$

Se se reduz α, aumenta $1 - \beta$



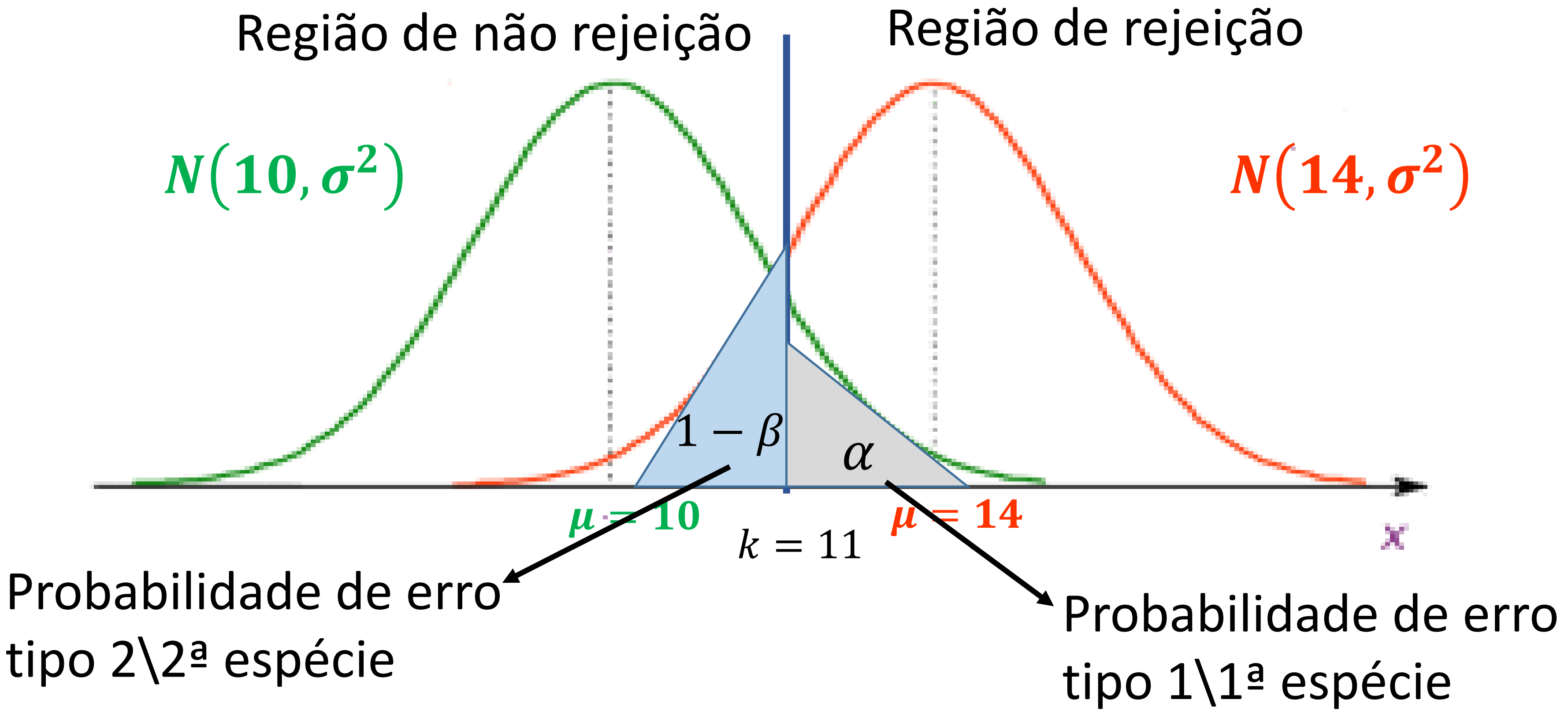
Ensaio de Hipóteses

Seja uma população $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$

Pretende−se testar $\boldsymbol{H_0}: \mu = 10$ contra $\boldsymbol{H_1}: \mu = 14$

$W = \{\bar{x} : \bar{x} > k\}$

Se se reduz $1 - \beta$, aumenta α



Ensaio de Hipóteses

8. Teste mais potente – Lema de Neyman-Pearson

Ideia importante: A redução das duas probabilidades (ou de uma delas, supondo a outra fixa) só se consegue aumentando a dimensão da amostra.

Na impossibilidade de minimizar ambos os erros, o Lema Neyman-Pearson define o **teste mais potente** com base em dois critérios:

1. Fixar a probabilidade de erro tipo 1 (α) porque atribui a este erro maior importância. Em geral $\alpha = 0{,}1, 0.05, 0.01$. Apenas se rejeita H_0 se houver forte evidência estatística contra esta hipótese.

2. Minimizar a probabilidade de erro tipo 2 $(\mathbf{1-\beta})$ ou maximizar a potência do ensaio $(\boldsymbol{\beta})$.

Ensaio de Hipóteses

8. Teste mais potente – Lema de Neyman-Pearson

Teorema 8.1: Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casualde uma população com função densidade $f(x|\theta)$, $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$. Seja $C > 0$, e $W \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto do espaço amostra definido pelas condições:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x|\theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x|\theta_0)} > \mathrm{C} \Leftrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W, \qquad (8.5)$$

$$P\big((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in W | \theta = \theta_0\big) = \alpha \qquad (8.6)$$

Então, o teste associado à região crítica W é o teste mais potente de dimensão α para testar $H_0: \theta = \theta_0 \quad contra \; H_1: \theta = \theta_1$

Ensaio de Hipóteses

8. Teste mais potente – Lema de Neyman-Pearson

Exemplo: Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual de uma população com distribuição de Poisson de média λ desconhecida.

$$H_0: \lambda = \lambda_0 \quad contra\ H_1: \lambda = \lambda_1 > \lambda_0$$

$$f(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \lambda{>}0, \quad \mathrm{x} = 0, 1, 2, \cdots \Rightarrow \frac{L(\lambda_1)}{L(\lambda_0)} = \frac{\prod_{i=1}^n f(x|\lambda_1)}{\prod_{i=1}^n f(x|\lambda_0)} > C \quad \Leftrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W$$

$$\frac{\prod_{i=1}^n f(x|\lambda_1)}{\prod_{i=1}^n f(x|\lambda_0)} = \frac{e^{-\mathrm{n}\lambda_1}\lambda_1^{\sum_{i=1}^n x_i}}{e^{-\mathrm{n}\lambda_0}\lambda_0^{\sum_{i=1}^n x_i}} = e^{-\mathrm{n}\lambda_1 + \mathrm{n}\lambda_0} * \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} > C$$

$$ln\left(e^{-\mathrm{n}\lambda_1 + \mathrm{n}\lambda_0} * \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}\right) = -n(\lambda_1 - \lambda_o) + \sum_{i=1}^n x_i \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) > lnC$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i > \underbrace{\frac{n(\lambda_1 - \lambda_o) + lnC}{\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)}}_{C'}$$

$$\lambda_1 > \lambda_0 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_0} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) > 0 \Rightarrow C' > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i > C'$$

É a região crítica UMP para o ensaio

$$H_0: \lambda = \lambda_0 \quad contra\ H_1: \lambda = \lambda_1 > \lambda_0$$

Ensaio de Hipóteses

8. Teste mais potente – Lema de Neyman-Pearson

Exemplo: Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual de uma população com distribuição de Poisson de média λ desconhecida.

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad contra \; H_1 : \lambda = \lambda_1 < \lambda_0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i > \underbrace{\frac{n(\lambda_1 - \lambda_o) + lnC}{\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)}}_{C'}$$

$$\lambda_1 < \lambda_0 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_0} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) < 0 \Rightarrow C' < 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i < C'$$

É a região crítica UMP para o ensaio

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad contra \; H_1 : \lambda = \lambda_1 < \lambda_0$$

Ensaio de Hipóteses

Regra intuitiva: No teste de médias, variâncias ou proporções a região de rejeição está do lado da alternativa quando se utiliza a estatística "natural".

Exemplos:

$\boldsymbol{H_0}: \mu \leq 130\ grs\ contra\ \boldsymbol{H_1}: \mu > 130 \Rightarrow W_T = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): \bar{x} > k\}$

$\boldsymbol{H_0}: \sigma^2 \geq 0.5\ mts$ contra $\boldsymbol{H_1}: \sigma^2 < 0.5\ mts \Rightarrow W_T = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n):\ {s'}^2 < k\right\}$

$\boldsymbol{H_0}: \theta = 0.35$ contra $\boldsymbol{H_1}: \theta = 0.4 \Rightarrow W_T = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): \bar{x} > k\}$

Ensaio de Hipóteses

Procedimento prático para realizar um teste\ensaio:

1. Fixar $\boldsymbol{\alpha}$ num valor adequado ao problema a resolver

2. Escolher uma estatística teste (cuja distribuição, sob H_0, deve ser conhecida

3. Definir a região de rejeição

4. Realizar o teste e concluir (só nesta última etapa se utiliza a amostra observada)

Ensaio de Hipóteses

Exemplo: Seja uma população $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$ e uma amostra $n = 9$

Pretende-se testar $\boldsymbol{H_0}: \mu_0 = 10$ contra $\boldsymbol{H_1}: \mu_1 = 14$ $\qquad \alpha = 0.05$

$\mu_1 > \mu_0 \Rightarrow W_T = \{\bar{x} > k\}$ (Lema Neyman Pearson – regra intuitiva)

$$k: \mathrm{P}(\bar{X} > k | \mu = \mu_0) = \alpha \Leftrightarrow \mathrm{P}(\bar{X} > k | \mu = 10) = 0.05 \Leftrightarrow \mathrm{P}(\bar{X} \leq k | \mu = 10) = 0.95$$

$$\Rightarrow k = invnorm\left(0.95, 10, {}^{2}/{}_{3}\right) = 11.097$$

ou

$$k: \mathrm{P}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{{}^{\sigma}/{}_{\sqrt{n}}} > \frac{k - 10}{{}^{2}/{}_{3}}\right) = 0.05 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(Z > \frac{k - 10}{{}^{2}/{}_{3}}\right) = 0.05 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{k - 10}{{}^{2}/{}_{3}}\right) = 0.95$$

$$\Rightarrow \frac{k - 10}{{}^{2}/{}_{3}} = norminv.s(0.95, 0, 1) = 1.645 \Rightarrow k = 10 + \frac{2}{3} * 1.645 = 11{,}1$$

Ensaio de Hipóteses

Probabilidade de erro de 2ª espécie:

$$1-\beta = P(não\ rejeitar\boldsymbol{H_0}|\boldsymbol{H_0}\ falsa) = P\left((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in \overline{W_T}|\theta = \theta_1\right)$$

$$= P(\bar{X} \leq 11.1|\mu = 14) = \text{normal cdf}(-10000, 11.097, 14{,}2/3) \approx 0$$

Potência do ensaio: $\beta \approx 1-0 = 1$

$$\beta = P(rejeitar\boldsymbol{H_0}|\boldsymbol{H_0}\ falsa) = P\left((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in W_T|\theta = \theta_1\right)$$

$$= P(\bar{X} > 11.1|\mu = 14) = 1 - \text{normal cdf}(11.1, 100000{,}14{,}2/3) \approx 1$$

$$\beta = P(rejeitar\boldsymbol{H_0}|\boldsymbol{H_0}\ falsa) = P\left((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in W_T|\theta = \theta_1\right)$$

$$= P(\bar{X} > 11.1|\mu = 14) = \mathrm{P}\left(\frac{\bar{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{11.1-14}{2/3}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{\bar{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > -4.35\right) = \mathrm{P}\left(\frac{\bar{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 4.35\right)$$

$$= \text{normal cdf}(4.35{,}0{,}1) \approx 1$$

Ensaio de Hipóteses

Retome-se o exemplo anterior: população $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4), (X_1, X_2, \cdots, X_n)$

Pretende−se testar $\boldsymbol{H_0}: \mu = 10$ contra $\boldsymbol{H_1}: \mu > 10$ $\alpha = 0.05$

$\mu_1 > \mu_0 \Rightarrow W = \{\bar{x} > k\}$ (Lema Neyman Pearson – regra intuitiva)

Cálculo de k faz-se exactamente do mesmo modo $\Rightarrow W_T = \{\bar{x} > k(n)\}$

Com $k(n) = 10 + 1.645 * \frac{2}{\sqrt{n}}$

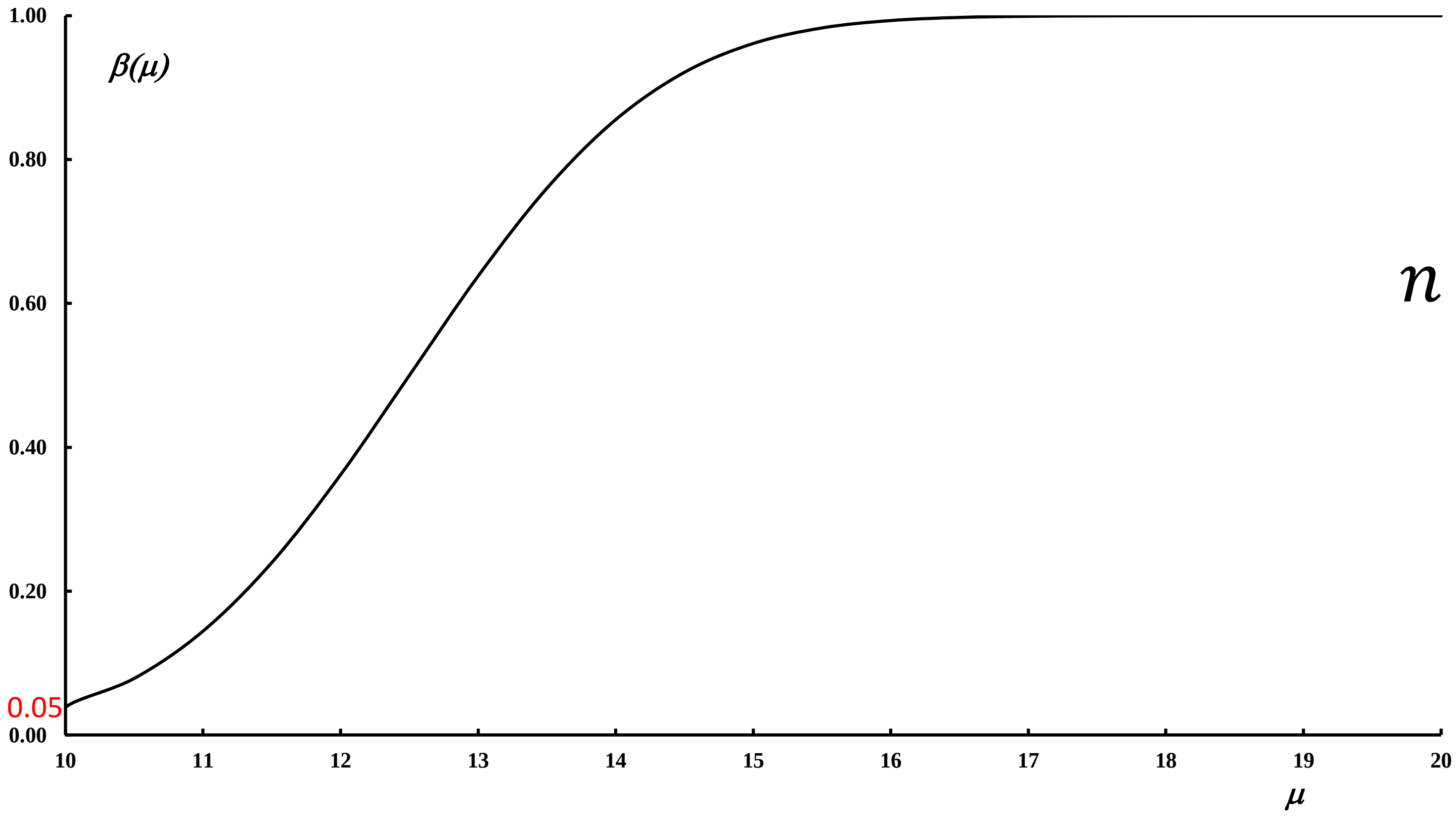
Potência do ensaio $-$ $\beta(\boldsymbol{\mu}) = P(rejeitar\, \boldsymbol{H_0} | \boldsymbol{H_0}\, falsa) = P\big((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in W_T | \theta > \theta_0\big)$

$$= P(\bar{X} > k(n) | \mu > 10) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{k(n) - \boldsymbol{\mu}}{2/\sqrt{n}} | \mu > 10\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \le \frac{k(n) - \boldsymbol{\mu}}{2/\sqrt{n}} | \mu > 10\right) = 1 - \boldsymbol{\Phi}\left(\frac{k(n) - \boldsymbol{\mu}}{2/\sqrt{n}} | \mu > 10\right)$$

Ensaio de Hipóteses

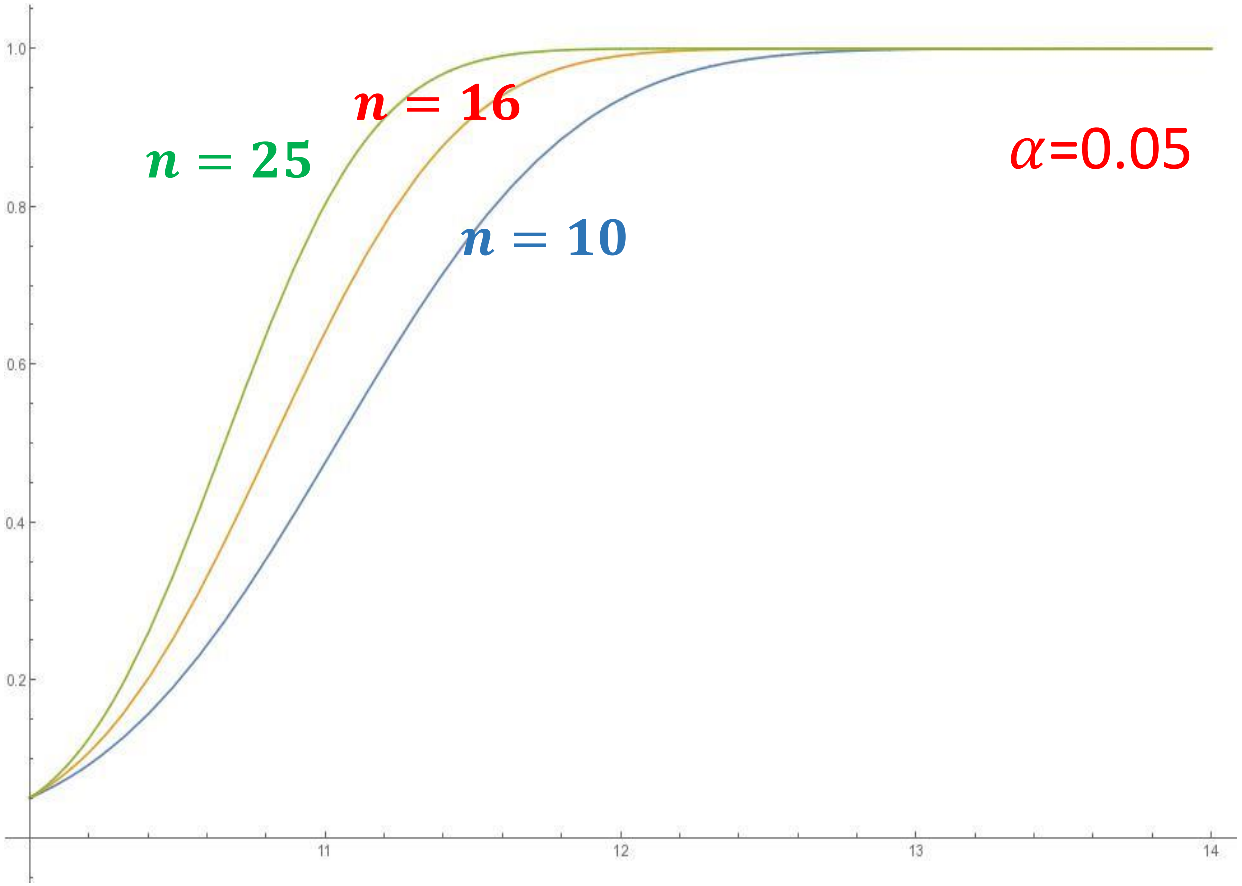
O gráfico que se segue ilustra a função potência $\beta(\mu)$ para $\mu > 10$



n fixo

Ensaio de Hipóteses

O que acontece à função potência quando, mantendo-se α constante, aumenta a dimensão da amostra?



Notas:

. Fixado α, $k(n)$ é função da dimensão da amostra n;

- Para cada $\mu > 10$, quanto maior a dimensão da amostra mais elevada é a potência do teste.

Ensaio de Hipóteses

Notas:

- Para testar $\boldsymbol{H_0}: \theta \leq \theta_0$ contra $\boldsymbol{H_1}: \theta > \theta_0$ procede-se como para testar $\boldsymbol{H_0}: \theta = \theta_0$ contra $\boldsymbol{H_1}: \theta > \theta_0$

- Para testar $\boldsymbol{H_0}: \theta \geq \theta_0$ contra $\boldsymbol{H_1}: \theta < \theta_0$ procede-se como para testar $\boldsymbol{H_0}: \theta = \theta_0$ contra $\boldsymbol{H_1}: \theta < \theta_0$

- Em ambos os casos está-se a escolher a pior situação.

Ensaio de Hipóteses

Testes bilaterais: $\boldsymbol{H_0}: \theta = \theta_0$ contra $\boldsymbol{H_1}: \theta \neq \theta_0$

Numa situação destas é fácil entender que **não existe, em geral, um teste UMP**.

Se se retomar o exemplo anterior $\boldsymbol{H_0}: \mu = 10$ contra $\boldsymbol{H_1}: \mu \neq 10$, tal corresponderia a ter simultaneamente 2 testes, quando:

- $\mu > 10$ ter-se-ia a região crítica $W_T = \{\bar{x} > k\}$
- $\mu < 10$ a região crítica $W_T = \{\bar{x} < k\}$.

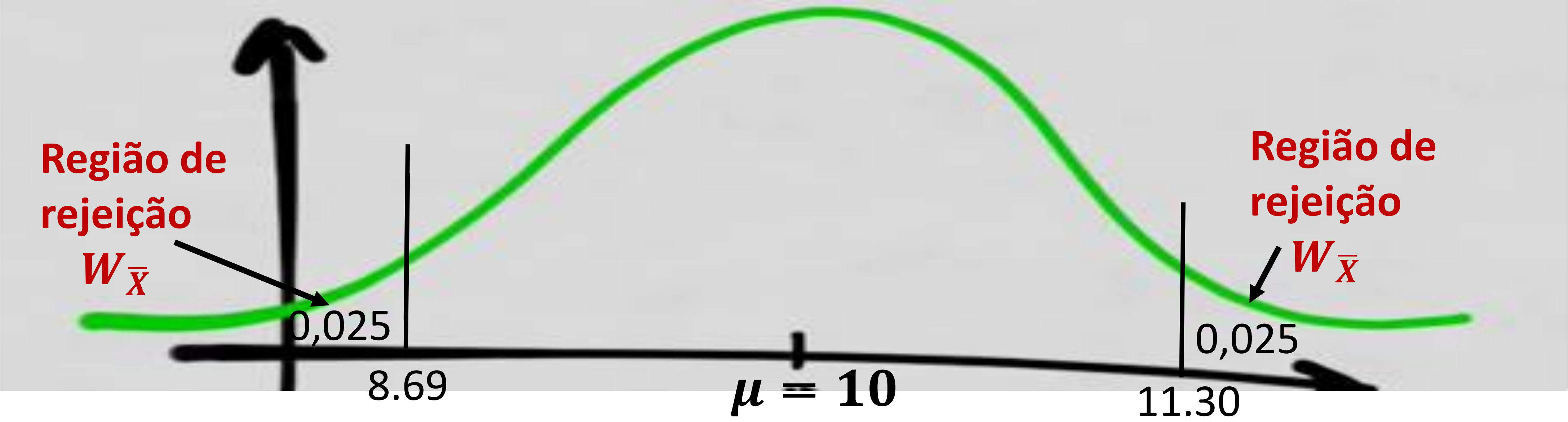
Isto não pode acontecer simultaneamente.

Para definir a região crítica recorre-se a uma regra intuitiva que consiste em considerar uma região de rejeição nas duas abas da distribuição da estatística teste - $W_T = \{\bar{x} < k_1 \cup \bar{x} > k_2\}$ com $k_1, k_2: P(\bar{x} < k_1) = P(\bar{x} > k_2) = \alpha/2$.

Ensaio de Hipóteses

Testes bilaterais: $\boldsymbol{H_0}: \theta = \theta_0$ contra $\boldsymbol{H_1}: \theta \neq \theta_0$

Retome-se o exemplo anterior $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$, $n = 9$ e consider-se o ensaio $\boldsymbol{H_0}: \mu = 10$ contra $\boldsymbol{H_1}: \mu \neq 10$ $\qquad \alpha = 0.05 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$



Ensaio de Hipóteses

Valor-p

Num teste de hipóteses fixada a dimensão α, rejeita-se (ou não) $\boldsymbol{H_0}$ sem se ter em conta se a estatística teste T está longe ou perto do valor crítico k.

O **valor-p** é uma forma alternativa de reportar o resultado do teste que permite ultrapassar esta limitação.

Definição: Seja $t(x_1, x_2, \cdots, x_n) = t_{obs}$. O **valor-p** é a **probabilidade**, p_{obs}, **de observar um valor de** t_{obs} **tão ou mais desfavorável para** H_0, **admitindo** H_0 **verdadeira**

O **valor-p mede a evidência que os dados fornecem a favor de** H_0. Qto menor for o valor-p menor é a consistência dos dados com H_0, logo mais se rejeita H_0. Ex: se $p_{obs} = 0.0001$ rejeita-se, se $p_{obs} = 0{,}25$ não se rejeita. E se $p_{obs} = 0.052$?

Ensaio de Hipóteses

Cálculo do Valor-p

1. Obter a distribuição da estatística teste assumindo que $\boldsymbol{H_0}$ (ou o seu valor limite no caso de uma hipótese composta) é verdadeira.

2. Definir o acontecimento mais improvável do que o observado (+ para o lado da alternativa, depende de $\boldsymbol{H_1}$).

3. Calcular a sua probabilidade.

Exemplo: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4),\ n = 16, t(x_1, x_2, \cdots, x_n) = t_{obs}$=11

1. $\boldsymbol{H_0}: \mu = 10\ (\geq 10)$ contra $\boldsymbol{H_1}: \mu < 10\ \Rightarrow T = \bar{X} \sim N(10, {}^4/_{16})$

Os casos tão ou mais desfavoráveis para $\boldsymbol{H_0}$ correspondem a observar uma média amostral igual ou mais "afastada" de 10 do que o valor observado, 11.

$p_{obs} = P(\bar{X} \leq 11 | \mu = 10) = 0{,}98 \Rightarrow$ não se rejeita $\boldsymbol{H_0}$

Ensaio de Hipóteses

Cálculo do Valor-p

Exemplo: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4),\; n = 16, t(x_1, x_2, \cdots, x_n) = t_{obs}$=11

2. $\boldsymbol{H_0}: \mu = 10\ (\leq 10)$ contra $\boldsymbol{H_1}: \mu > 10\ \Rightarrow T = \bar{X} \sim N(10, {}^4/_{16})$

Os casos tão ou mais desfavoráveis para $\boldsymbol{H_0}$ correspondem a observar uma média amostral igual ou mais “afastada” de 10 do que o valor observado, 11.

$$p_{obs} = P(\bar{X} \geq 11 | \mu = 10) = 1 - P(\bar{X} < 11 | \mu = 10) = 1 - 0{,}98 \approx 0.02$$

Como $p_{obs} = 0.02 < 0.05 \Rightarrow$ rejeita-se $\boldsymbol{H_0}$ para um nível de significância $\alpha = 0.05$

Ensaio de Hipóteses

Cálculo do Valor-p

Exemplo: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4),\ n = 16, t(x_1, x_2, \cdots, x_n) = t_{obs}$=11

2. $\boldsymbol{H_0}: \mu = 10$ contra $\boldsymbol{H_1}: \mu \neq 10 \Rightarrow T = \bar{X} \sim N(10, {}^4/_9)$

Os casos tão ou mais desfavoráveis para $\boldsymbol{H_0}$ correspondem a observar uma média amostral mais "afastada" de 10 do que o valor observado, 11 quer para valores inferiores quer para valores superiores.

$$p_{obs} = P(|\bar{X}| \geq 11 | \mu = 10) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -2\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq 2\right) = 0.046$$

$\Rightarrow$ rejeita-se $\boldsymbol{H_0}$ para nível significância de 5%.

Ensaio de Hipóteses

Populações normais $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ – teste à média

1. Com variância σ^2 conhecida

Estatística teste: $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, {\sigma^2}/{n}\right)$ ou $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Aplicar a regra intuitiva para o tipo de ensaio escolhido

Região crítica e valor-p no Quadro 8.3 pg.492

2. Com variância σ^2 desconhecida

Estatística teste: $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

Aplicar a regra intuitiva para o tipo de ensaio escolhido

Região crítica e valor-p no Quadro 8.5 pg.495

Ensaio de Hipóteses

Populações normais $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ – teste à variância

Estatística teste: $T = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \boldsymbol{\chi}^2_{(n-1)}$

Aplicar a regra intuitiva para o tipo de ensaio escolhido

Região crítica e valor-p no Quadro 8.7 pg.496

Ensaio de Hipóteses

Populações normais $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

1. Teste à igualdade de médias com variâncias conhecidas

$\boldsymbol{H_0}: \mu_X = \mu_Y$

Estatística teste: $\mathrm{T} = \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$

ou

$$\mathrm{T} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

Aplicar a regra intuitiva para o tipo de ensaio escolhido

Região crítica e valor-p no Quadro 8.9 pg.499

Ensaio de Hipóteses

Populações normais $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

2. Teste à igualdade de médias com **variâncias desconhecidas** mas **iguais**

$$\boldsymbol{H_0}: \mu_X = \mu_Y$$

Estatística teste: $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\sqrt{\frac{(m-1)s_X'^2 + (n-1)s_Y'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$

Aplicar a regra intuitiva para o tipo de ensaio escolhido

Região crítica e valor-p no Quadro 8.10 pg.500

Ensaio de Hipóteses

Amostras emparelhadas

Quando se comparam médias de duas populações pode fazer sentido comparar amostras emparelhadas para procurar minimizar o efeito de flutuações aleatórias.

Definição: amostras em que se submete o mesmo indíviduo a duas situações em análise.

Exemplo: submeter o mesmo doente a dois tratamento diferentes para uma doença para comparar a eficácia dos tratamentos minimizando o efeito de um vasto conjunto de características pessoais que afectam os resultados podendo mascarar o efeito dos medicamentos.

Ensaio de Hipóteses

Amostras emparelhadas

A amostra $\left(X_i, Y_j\right), \mathrm{i} = 1, 2, \cdots, n$ compostas por pares de observações de duas populações normais $X{\sim}N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y{\sim}N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ é uma amostra emparelhada de populações normais

Note-se que: embora os pares de observações (X_i, Y_i) e $\left(X_j, Y_j\right)$ $i \neq j$ sejam independentes, não há independência entre X e Y no mesmo par.

Assim: $Z_i = X_i - Y_i{\sim}N\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma_{Z_i}^2\right)$, com $\sigma_{Z_i}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}$ $\mathrm{i} = 1, 2, \cdots, n$

Para o ensaio: $H_0: \mu_X = \mu_Y$

Estatística teste: $T = \dfrac{\bar{Z} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_Z'^2 / \sqrt{n}} {\sim} t_{(n-1)}$ com $S_Z'^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})^2}{n-1}$

Ensaio de Hipóteses

Populações normais $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

2. Teste para a igualdade de variâncias: $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

Estatística teste: $F = \frac{s_X'^2}{s_Y'^2} \sim F(m-1, n-1)$

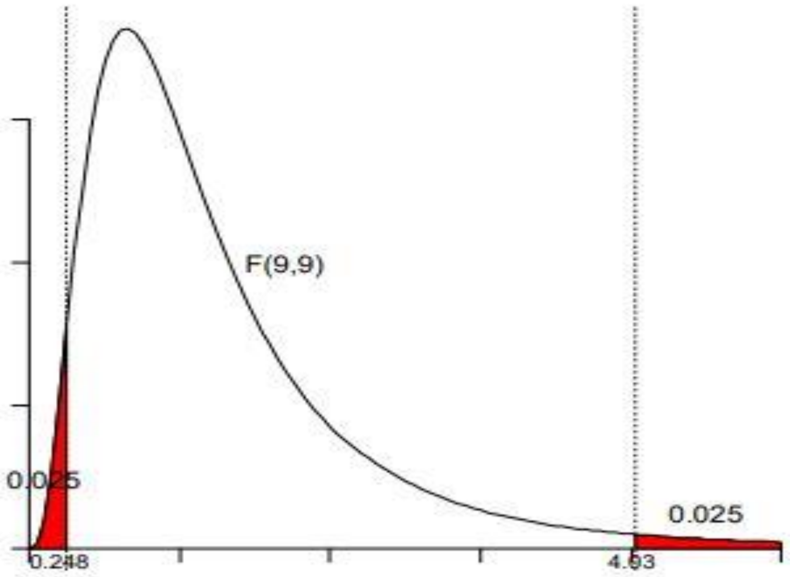
Aplicar a regra intuitiva para o tipo de ensaio escolhido

Região crítica e valor-p no Quadro 8.11 pg.502

Ensaio de Hipóteses

Populações normais $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

2. Teste para a igualdade de variâncias: $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ contra $H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$



$f_2: P(F > f_2) = 0.025$
da tabela vem $f_2 = 4.03$

$f_1: P(F < f_1) = 0.025$
Que pode ser obtido na máquina (computador) mas não na tabela.

Como $P(F < f_1) = 0.025 \Leftrightarrow P\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{f_1}\right) = 0.025$
e $\frac{1}{F} \sim F(9{,}9)$
obtém-se $\frac{1}{f_1} = 4.03$ e portanto $f_1 = \frac{1}{4.03} = 0.248$

Assim $W = \{f: f < 0.248 \vee f > 4.03\}$

Como $f_{obs} = 2.143$, não se rejeita H_0.

Ensaio de Hipóteses

Grandes amostras:

Populações Bernoulli $X \sim B(1, \theta)$ – teste à proporção amostral

$$\boldsymbol{H_0}: \theta = \theta_0$$

Estatística teste: $\bar{X} \dot{\sim} N\left(\theta_0, \frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}\right)$ ou $\frac{\bar{X}-\theta_0}{\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}} \dot{\sim} N(0, 1)$

Aplicar a regra intuitiva para o tipo de ensaio escolhido

Região crítica e valor-p no Quadro 8.13 pg.508

Ensaio de Hipóteses

Grandes amostras:

Populações Bernoulli $X \sim B(1, \theta_X), Y \sim B(1, \theta_Y)$

Teste à igualdade de proporções amostrais: $\boldsymbol{H_0}: \theta_X = \theta_Y$

Estatística teste: $\mathrm{T} = \bar{X} - \bar{Y} \dot{\sim} N\left(0, \hat{\theta}(1-\hat{\theta})\left(\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}\right)\right)$

ou

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})\left(\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}\right)}} \dot{\sim} N(0, 1) \text{ com } \hat{\theta} = \frac{n_X \bar{x} + n_Y \bar{y}}{n_X + n_Y}$$

Aplicar a regra intuitiva para o tipo de ensaio escolhido

Região crítica e valor-p no Quadro 8.14 pg.510

Ensaio de Hipóteses

Grandes amostras:

Populações Poisson $X \sim Po(\boldsymbol{\lambda})$ – teste à média

$\boldsymbol{H_0}: \lambda = \lambda_0$

Estatística teste: $\dfrac{\bar{X} - \boldsymbol{\lambda}_0}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{\lambda}}{n}}} \dot{\sim} N(0, 1)$

Aplicar a regra intuitiva para o tipo de ensaio escolhido